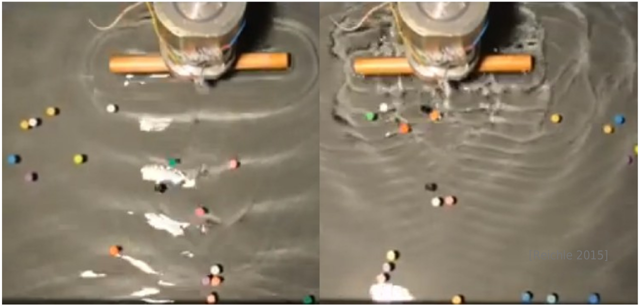
9. Vlny na vode

Richard Hlubina

UK Bratislava

Úvodné sústredenie TMF, Bratislava 22.10. 2015

Zadanie



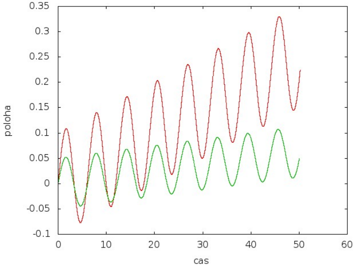
Vytvorte vlnu na vode pomocou vertikálne kmitajúceho horizontálne uloženého valca. V závislosti od frekvencie a/alebo amplitúdy kmitov sa bude javiť, že voda prichádza alebo odchádza od valca. Preskúmajte tento jav.

Literatúra

- I. Marčenko: `http://kit.ilyam.org`
- H. Punzmann, N. Francois, H. Xia, G. Falkovich, and M. Shats, *Generation and reversal of surface flows by propagating waves*, Nature Physics 10, 658 (2014) + supplementary material
  video: dva režimy vlnenia
  video: pohyb ping-pongovej loptičky po hladine
- H. Punzmann, N. Francois, H. Xia, G. Falkovich, and M. Shats, *Tractor beam on water surface*, arXiv:1407.0745
- K časopisu Nature Physics sa možno dostať po zaplatení symbolického poplatku na stránke `http://www.cvtisr.sk`

Stokesovo unášanie

- skúmajme pozdĺžnu rovinnú vlnu
- rýchlosť prúdenia v mieste x a čase t: $v(x,t) = u\cos(kx - \omega t)$
- nech $\xi = \xi(t)$ je trajektória jednej častice tekutiny
- pre rýchlosť častice platí: $\frac{d\xi}{dt} = u\cos(k\xi - \omega t)$
- riešenie pre rôzne $\alpha = \frac{ku}{\omega} = kA$, kde A je priestorová amplitúda výchyliek:



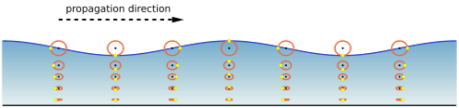
- trajektória = oscilácie + postupný pohyb v smere šírenia vlny (Stokes)
- rýchlosť unášania pre malé α: $v_{\text{stokes}} = \frac{ku^2}{2\omega} = \frac{1}{2}k\omega A^2$

Povrchové vlny v bezvírovej a nestlačiteľnej kvapaline

- hľadajme rozloženie (pole) rýchlostí $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ povrchovej vlny
- nestlačiteľnosť: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ alebo $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$
- bezvírovosť: $\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}, t)$ alebo $v_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $v_y = \frac{\partial f}{\partial y}$
- bezvírovosť a nestlačiteľnosť: $\nabla \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t) = 0$ alebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$
- vlnové riešenie: $f(\mathbf{x}, t) = \cos(kx - \omega t) G(y)$
  dosadením do $\nabla \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t) = 0$ máme rovnicu pre $G(y)$: $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = k^2 G$
- riešenie pre nekonečne hlbokú vodu: $G(y) = Ae^{ky}$, na hladine $y = 0$
- výsledné vlnové riešenie: $f(\mathbf{x}, t) = A\cos(kx - \omega t)e^{ky}$
- pole rýchlostí (z formuly $\mathbf{v} = \nabla f$):

$$v_x(\mathbf{x}, t) = -kA\sin(kx - \omega t)e^{ky}$$

$$v_y(\mathbf{x}, t) = kA\cos(kx - \omega t)e^{ky}$$



- Stokesovo unášanie: video (wikipédia)

Lineárne (malé) povrchové vlny: disperzný zákon

- Newtonova pohyb. rovnica pre kúsok kvapaliny pri malých rýchlostiach:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p - \nabla \Phi$$

$\rho =$ hustota hmotnosti, $p =$ tlak, $\Phi = \rho g y$ hustota potenc. energie

- z formuly $\mathbf{v} = \nabla f$ vyplýva: $\nabla(\rho \frac{\partial f}{\partial t} + p + \rho g y) = 0$
- na hladine teda platí: $\rho \frac{\partial f}{\partial t} + p_h + \rho g y_h = \mathrm{const}$ (*)
- tlak na hladine: $p_h = p_{\mathrm{atm}} + \sigma k^2 y_h$ (pre vlnu úmernú $\cos kx$)
- derivácia (*) podľa času: $\rho \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + (\sigma k^2 + \rho g) \frac{\partial y_h}{\partial t} = 0$ (**)
- na hladine platí: $f(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$, $\frac{\partial y_h}{\partial t} = v_y = kA\cos(kx - \omega t)$
- dosadením do (**) nájdeme podmienku (disperzný zákon):

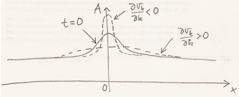
$$\omega = \sqrt{gk + \frac{\sigma k^3}{\rho}} = \sqrt{gk\,[1 + (k\ell)^2]}, \qquad \ell = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$$

- gravitačné (dlhé) vlny: $k\ell \ll 1$, $\omega \approx \sqrt{gk} \ll \sqrt{2g/\ell}$
  kapilárne (krátke) vlny: $k\ell \gg 1$, $\omega \approx \sqrt{g\ell^2 k^3} \gg \sqrt{2g/\ell}$

Modulačná nestabilita

- skúmajme jednorozmernú vlnu $A(x,t)\cos\theta(x,t)$
  s pomaly sa meniacou amplitúdou $A(x,t)$, ktorá nemusí byť malá
- definujme lokálny vlnový vektor $k = \frac{\partial\theta}{\partial x}$ a lokálnu frekvenciu $\omega = -\frac{\partial\theta}{\partial t}$;
  musí platiť $\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial t} = 0$ (*)
- predpokladajme, že $\omega(k,A) = \omega_0(k) + \gamma A^2$
  t.j. frekvencia závisí od k aj od amplitúdy; $\omega_0(k)$ je disperzia malých vĺn
- rýchlosť šírenia vĺn (grupová rýchlosť) je $v_k = \frac{\partial\omega}{\partial k}$
- skúmajme osud fluktuácie amplitúdy $A(x)$ okolo bodu $x = 0$ (nech $\gamma > 0$):

- prípad $\frac{\partial v_k}{\partial k} > 0$
- $x < 0$: v_k klesá
- $x > 0$: v_k rastie
- fluktuácia zaniká



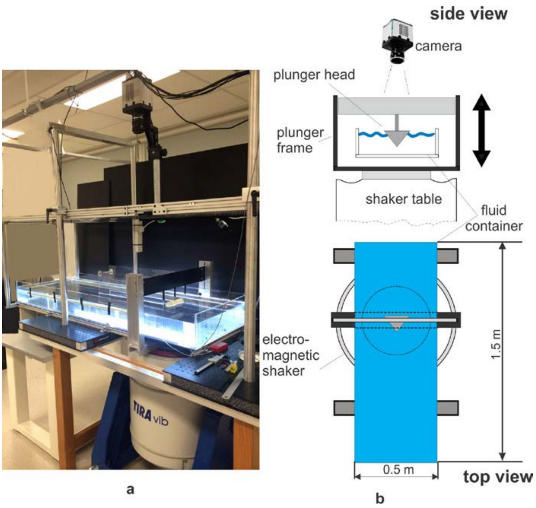
- $x < 0$: $\frac{\partial\omega}{\partial x} > 0$, $\frac{\partial k}{\partial t} < 0$ (*)
- $x > 0$: $\frac{\partial\omega}{\partial x} < 0$, $\frac{\partial k}{\partial t} > 0$ (*)

- prípad $\frac{\partial v_k}{\partial k} < 0$
- $x < 0$: v_k rastie
- $x > 0$: v_k klesá
- fluktuácia rastie

- záver: podmienkou nestability je splnenie tzv. Lighthillovho kritéria:

$$\gamma\frac{\partial v_k}{\partial k} < 0 \quad \text{alebo} \quad \gamma\frac{\partial^2\omega_0(k)}{\partial k^2} < 0$$

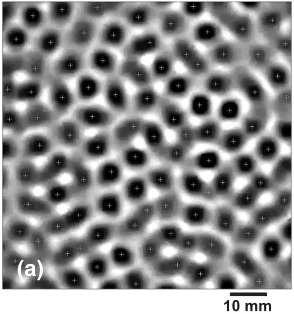
Experimentálna aparatúra



- hĺbka vody: 8 cm
- priemer valca: 2.5 cm
- dĺžka valca: 13 cm
- budiaca frekvencia $f = 10$ až 200 Hz, $\omega = 2\pi f$
- max. zrýchlenie $a = A\omega^2 \lesssim 10\text{g}$
- čistá voda $\ell = 2.7$ mm
  $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{\ell}} \approx 14$ Hz

Experimentálne techniky

- mapa okamžitého rozloženia hĺbky vody

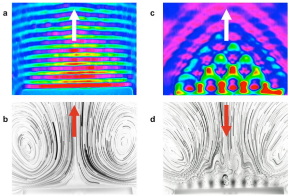


- mapovanie difúznym svetlom
- osvetlenie zdola LED panelom
- voda + 2-10% mlieka
- pozorovanie zhora vysokorýchlostnou videokamerou
- kalibrácia: pri pokojnej hladine

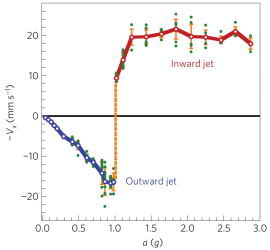
- horizontálne prúdenie vody:
  pridanie farbiva alebo drobných plávajúcich častíc,
  pozorovanie zhora video

Punzmann a kol.: výsledky

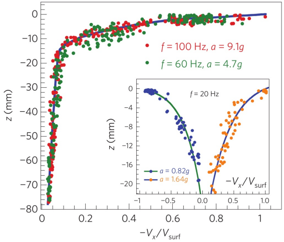
2 režimy



rýchlosť prúdenia



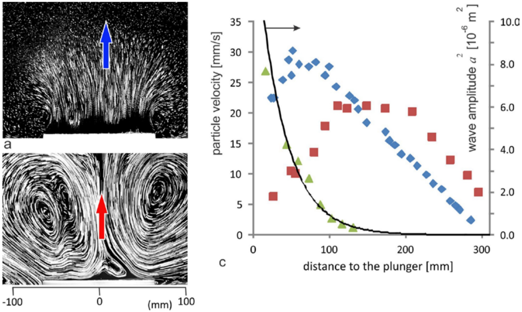
hĺbkový profil rýchlosti



- pre $a < a_c$: rovinná vlna; znamienko unášania v zhode so Stokesom
- pre $a > a_c$: priečne modulovaná vlna; opačné znamienko unášania
- v oboch prípadoch horizontálne prúdenie iba v tenkej vrstve pri hladine spätný pohyb kvapaliny sa realizuje pri krajoch valca

Punzmann a kol.: interpretácia v oblasti $a < a_c$

- rýchlosť unášania nesedí so Stokesovou predpoveďou $v_{\text{stokes}} = \frac{1}{2}k\omega A^2$

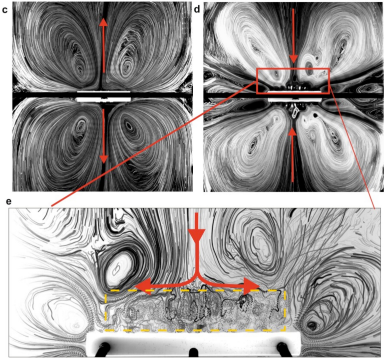


- modré dáta: tesne po zapnutí budenia
- červené dáta: ustálený stav

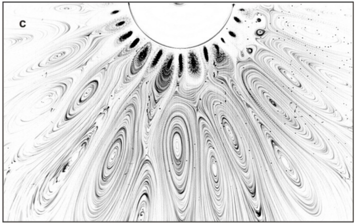
- “the flow velocity is not determined by the local wave field, but results from a global flow pattern”

Punzmann a kol.: interpretácia v oblasti $a > a_c$

- otočenie rýchlosti unášania nastane pri vzniku priečnej modulácie vĺn
- otočenie nastáva pre gravitačné vlny (8 Hz) aj pre kapilárne vlny (50 Hz)
- pri otočení sa nemení tvar horizontálnych prúdnic, iba smer prúdenia
- v blízkosti zdroja vlnenia: chaos + unášanie do strán
  tak vzniká ”pumpovanie” horizontálneho pohybu



- chaos je dôsledkom tvorby vírov pri zdroji vlnenia video
- víry v blízkosti kužeľovitého zdroja vlnenia:



Ako postupovať?

- teória veľmi náročná, odporúčam experimentovanie
- kľúčová otvorená otázka: existuje priamy súvis medzi smerom horizontálneho prúdenia a charakterom vlnenia? alebo sú horizontálne prúdenie a vlny dva takmer nezávislé javy vyvolané pohybom valca?
- argumenty v prospech priameho súvisu:
  - otočenie rýchlosti unášania nastáva pri vzniku priečnej modulácie vĺn
- argumenty proti priamemu súvisu:
  - veľkosť rýchlosti unášania nesedí so Stokesom ani pre malé amplitúdy vĺn
  - tvar horizontálnych prúdnic takmer nezávisí od amplitúdy vlnenia
  - pri každej amplitúde vĺn existujú oblasti, kde unášanie má smer vlnenia (?)
  - pri každej amplitúde vĺn existujú oblasti, kde unášanie ide proti vlneniu (?)
- ďalšie možné experimenty:
  - overiť tvrdenia s otáznikom
  - použiť konfiguráciu, ktorá zamedzí možnosti návratu vody horizontálnym prúdením pri hladine; bude vtedy voda prúdiť? (vracať sa môže napr. vo väčšej hĺbke); bude sa smer prúdenia meniť s amplitúdou vlnenia?